例題 4　内積の演算となす角

$|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:\sqrt{3}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

解　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-2\vec{b}|^2$ より，$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

これより，$6\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{b}|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$ …①　また，$|\vec{a}|=\frac{1}{\sqrt{3}}|\vec{b}|$ …②

よって，①，②より，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2\div\frac{1}{\sqrt{3}}|\vec{b}|^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに，$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$

17　次の問いに答えよ．

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|2\vec{a}+3\vec{b}|=6$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2)　$|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:3$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(3)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-2\vec{b}$ のなす角の余弦を求めよ．

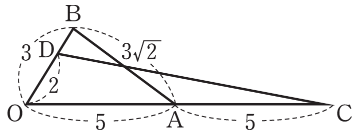
18　$|\vec{x}-2\vec{y}|=1$，$|\vec{x}-\vec{y}|=1$ で，$\vec{x}-2\vec{y}$ と $\vec{x}-\vec{y}$ が垂直である．次の問いに答えよ．

(1)　$|\vec{x}|$，$|\vec{y}|$ の値を求めよ．

(2)　$\vec{x}$，$\vec{y}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ．

19　OA＝5，OB＝3，AB＝$3\sqrt{2}$ の△OABがあり，点C，Dを右の図のようにとる．次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$



問　題 C

20　放物線 $y=(x-a)^2$ と直線 $y=\frac{1}{a}x$ の交点をP，Qとし，A$(a,\ 0)$とする．このとき，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ は垂直になることを示せ．

21　△ABCで，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=b$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=c$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$(a-b)(b-c)(c-a)=0$ のとき，△ABCはどんな三角形か．

(2)　△ABCの面積 S は，$S=\frac{1}{2}\sqrt{ab+bc+ca}$ であることを証明せよ．

22　平面上に中心O_1，半径 $a\,(0<a<2)$ の円 C_1 と，中心O_2，半径 2 の円 C_2 があり，C_2 は点O_1を通り，C_1 と C_2 は 2 点A，Bで交わっている．$\overrightarrow{O_2A}\cdot\overrightarrow{O_2B}=-\frac{7}{8}$ のとき a の値を求めよ．

●ヒント

20　交点P，Qの x 座標をそれぞれ x_1，x_2 として，解と係数の関係を利用する．

21　(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{y}$ として，$|\vec{x}|$，$|\vec{y}|$，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ を a，b，c を用いて表す．