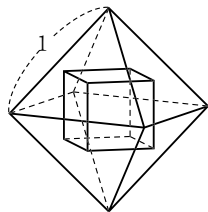
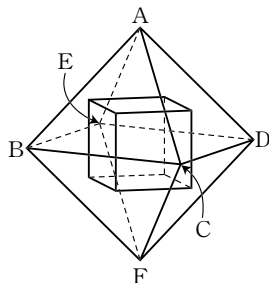


- 8** 右の図のように、正八面体の各面の重心を結んで、正八面体の内側に正六面体をつくる。正八面体の1辺の長さが1のとき、正六面体の体積を求めよ。



考え方 右の図において、辺BC, CD, DE, EBの中点をそれぞれK, L, M, Nとし、点A, K, F, Mを通る平面で切断したときの切断面を考える。

解答 右の図の正八面体において、辺BC, CD, DE, EBの中点をそれぞれK, L, M, Nとし、点A, K, F, Mを通る平面で切断すると、右下の図のようになる。



AK=KF=FM=MAより、四角形AKFMはひし形です

$$KM=1, AF=\sqrt{2}$$

線分AK, KF, FM, MA上にある正六面体の頂点をそれぞれP, Q, R, Sとすると、正六面体の1辺の長さは線分PQの長さに等しい。ここで、P, Qはそれぞれ△ABC, △FBCの重心であるから

$$AP:PK=2:1 \quad FQ:QK=2:1$$

よって、△AKFにおいて三角形と比の定理より

$$PQ:AF=KP:KA=1:3$$

$$\text{したがって } PQ=\frac{1}{3}AF=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに、正六面体の体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{27}$$

別解 辺AB, AC, AD, AEを2:1に内分する点をG, H, I, Jとすると、四角形GHIJは正方形で、その1辺の長さは、三角形と比の定理により

$$GH:BC=AG:AB=2:3$$

