5 面積

例題 1　放物線と x 軸で囲まれた図形の面積

次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

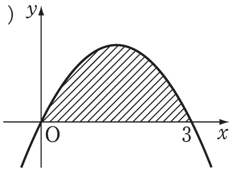
(1)　$y=-x^2+3x$　　　(2)　$y=x^2-3x+2$

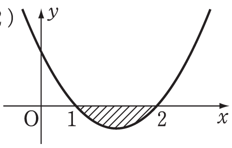
解 (1)　右の図１のように，放物線 $y=-x^2+3x$ は区間 $[0,\ 3]$ において，つねに $y\geqq 0$ である．よって，求める面積 S は，

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(2)　右の図２のように，放物線 $y=x^2-3x+2$ は区間 $[1,\ 2]$ において，つねに $y\leqq 0$ である．よって，求める面積 S は，

$$S=-\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(図１)


(図２)


1　次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$y=x^2-1$　　　(2)　$y=-x^2+4$

(3)　$y=(x-1)(x-3)$　　　(4)　$y=-(x+1)(x-3)$

(5)　$y=-x^2+x+2$　　　(6)　$y=2x^2-7x+3$

例題 2　２つのグラフで囲まれた図形の面積①

放物線 $y=x^2+2x$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

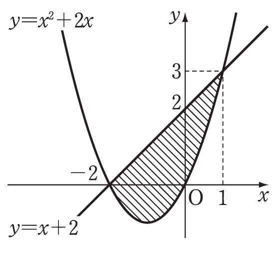
解　放物線と直線の交点の x 座標は，

$x^2+2x=x+2$ より，$x=-2,\ 1$

区間 $[-2,\ 1]$ において，$x^2+2x\leqq x+2$ だから，求める面積 S は，

$$S=\int_{-2}^1\{(x+2)-(x^2+2x)\}dx=-\int_{-2}^1(x^2+x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^1=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$



2　次の放物線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$y=x^2-x,\ y=2$　　　(2)　$y=-x^2+6x-5,\ y=3$

●ポイント

①　曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標が $a,\ b\ (a<b)$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，次のことが成り立つ．

(i)　区間 $[a,\ b]$ で，つねに $f(x)\geqq 0$ ならば，$S=\int_a^b f(x)dx$

(ii)　区間 $[a,\ b]$ で，つねに $f(x)\leqq 0$ ならば，$S=-\int_a^b f(x)dx$